第13講　方程式・不等式への応用

PART1 不等式の証明

要点整理と公式

要点① $f(x)>g(x)$ の証明①

$f(x)>g(x) \iff f(x)-g(x)>0$ であるから，$F(x)=f(x)-g(x)$ とおくと，

不等式 $f(x)>g(x)$ を示すことは，$F(x)>0$ を示すことと同義である。

ここでは，関数 $F(x)$ の増減を調べることで，$F(x)>0$ を証明する。

(ex) $x>0$ のとき，不等式 $e^x>1+x$ が成り立つことを示す。

$f(x)=e^x-(1+x)$ とおくと $f'(x)=e^x-1$

$x>0$ のとき $e^x>1$ であるから $f'(x)$

よって，$f(x)$ は $x \geqq 0$ において単調に　　する。

また，$f(0)=e^0-1=$

したがって，$x>0$ のとき $f(x)>0$

ゆえに，$x>0$ のとき $e^x>1+x$

x	0	$\cdots$
$f'(x)$		
$f(x)$		

$x>0$ のとき，不等式 $e^x>1+x+\frac{1}{2}x^2$ が成り立つことを示す。

$g(x)=e^x-\left(1+x+\frac{1}{2}x^2\right)$ とおくと $g'(x)=e^x-(1+x)=f(x)$

$x>0$ のとき $f(x)>0$ であるから $g'(x)>0$

よって，$g(x)$ は $x \geqq 0$ において単調に増加する。

また，$g(0)=e^0-1=0$

したがって，$x>0$ のとき $g(x)>0$

ゆえに，$x>0$ のとき $e^x>1+x+\frac{1}{2}x^2$

したがって，$x>0$ のとき $e^x>\frac{1}{2}x^2$　すなわち $\frac{e^x}{x}>\frac{1}{2}x$ が成り立つ。

$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2}x=\infty$ より $\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x}=\infty$ が成り立つ。

また，$e^x>\frac{1}{2}x^2$ より $0<\frac{x}{e^x}<\frac{2}{x}$ が成り立つ。

$\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}=0$ より $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=0$ が成り立つ。

※一般に，n が自然数のとき，次のことが成り立つ。

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^n}=\infty,\quad \lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=0$$

要点② $f(x)>g(x)$ の証明②

ここでは $f(x)>g(x)$ を示すために，$F(x)=f(x)-g(x)$ とおき，$F(x)$ の増減を調べて，($F(x)$ の最小値) >0 を示すことで，$F(x)>0$ を証明する。

(ex) $x>0$ のとき，不等式 $x\log x\geqq x-1$ が成り立つことを示す。

$f(x)=x\log x-(x-1)$ とおくと $f'(x)=1\cdot\log x+x\cdot\frac{1}{x}-1=\log x$

$f'(x)=0$ となるのは $x=1$

したがって，$x>0$ における $f(x)$ の増減は以下。

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	／	$-$	0	$+$
$f(x)$	／	↘	極小	↗

よって，$x>0$ における $f(x)$ の最小値は $f(1)=1\cdot\log 1-(1-1)=0$

したがって，$x>0$ のとき $f(x)\geqq 0$

ゆえに，$x>0$ のとき $x\log x\geqq x-1$

1 (1) 次の不等式を証明せよ。

(i) $x>0$ のとき $\cos x>-x+1$　　(ii) $x>0$ のとき $\sin x>x-\dfrac{x^2}{2}$

(2) $x>0$ のとき不等式 $\log x<2\sqrt{x}$ を証明せよ。

Point Pickup

不等式 $f(x)>g(x)$ の証明

$F(x)=f(x)-g(x)$ とおき，$F(x)>0$ であることを以下のように示す。

① $F(x)$ が単調増加かつ $F(a)\geqq 0 \implies x>a$ のとき $F(x)>0$

② （区間内における $F(x)$ の最小値）>0

第13講 PART1 確認問題

1 $0<x<2\pi$ のとき，次の不等式を証明せよ。

$$x>\sin x$$

ただし，[ア]～[ウ]は下の選択肢のうちから選べ。

〔証明〕

$f(x)=x-\sin x$ とおくと，

$$f'(x)=\boxed{ア}$$

$0<x<2\pi$ のとき，$f'(x)$ [イ] 0

よって，$f(x)$ は $0<x<2\pi$ で単調に [ウ] する。

また，$f(0)=$ [エ] であるから，

$0<x<2\pi$ のとき，$f(x)>0$

ゆえに，$0<x<2\pi$ のとき，

$$x>\sin x$$

[[ア] の選択肢]

① $-\cos x$　　② $1+\cos x$

③ $1-\cos x$　　④ $1-\sin x$

[[イ] の選択肢]

① $>$　　② $<$　　③ $=$

[[ウ] の選択肢]

① 増加　　② 減少

2 $0<x<2\pi$ のとき，次の不等式を証明せよ。

$$\cos x>1-\frac{1}{2}x^2$$

ただし，[オ]～[キ]は下の選択肢のうちから選べ。

また，**1** の結果 $x>\sin x$ ……(＊)を用いてもよい。

〔証明〕

$g(x)=\cos x-\left(1-\frac{1}{2}x^2\right)$ とおくと，

$$g'(x)=\text{[オ]}$$

(＊)より，$0<x<2\pi$ のとき，$g'(x)$[カ]0

よって，$g(x)$ は $0<x<2\pi$ で単調に[キ]する。

また，$g(0)=$[ク]であるから，

$0<x<2\pi$ のとき，$g(x)>0$

ゆえに，$0<x<2\pi$ のとき，

$$\cos x>1-\frac{1}{2}x^2$$

[[オ] の選択肢]

① $\sin x+x$　　② $\sin x-x$

③ $x-\sin x$　　④ $x-\cos x$

[[カ] の選択肢]

① $>$　　② $<$　　③ $=$

[[キ] の選択肢]

① 増加　　② 減少

3 $x>0$ のとき，次の不等式を証明せよ。

$$\log x<x$$

ただし，ケ は下の①～④のうちから選べ。

〔証明〕

$h(x)=x-\log x$ とおくと，

$$h'(x)=\boxed{ケ}$$

$x>0$ において $h(x)$ は $x=$ コ で最小値 サ をとる。

したがって，$x>0$ のとき，$h(x)>0$

すなわち，$x>0$ のとき，$\log x<x$

[ケ の選択肢]

① $\dfrac{1}{x}$　　② $x(x-1)$

③ $\dfrac{x+1}{x}$　　④ $\dfrac{x-1}{x}$

第13講　方程式・不等式への応用

PART1 不等式の証明

1 (1) 次の不等式を証明せよ。

(i) $x>0$ のとき $\cos x>-x+1$　　(ii) $x>0$ のとき $\sin x>x-\dfrac{x^2}{2}$

(2) $x>0$ のとき不等式 $\log x<2\sqrt{x}$ を証明せよ。

[解答]

(1)(i) $f(x)=\cos x-(-x+1)$ とおくと $f'(x)=-\sin x+1$

$x>0$ のとき $f'(x)\geqq 0$ であり，$f'(x)=0$ となるのは $x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi\times n$（$n$ は 0 以上の整数）のときのみである。

よって，$f(x)$ は $x\geqq 0$ において単調に増加する。

また，$f(0)=\cos 0-1=0$

したがって，$x>0$ のとき $f(x)>0$

ゆえに，$x>0$ のとき $\cos x>-x+1$

(ii) $g(x)=\sin x-\left(x-\dfrac{x^2}{2}\right)$ とおくと $g'(x)=\cos x-1+x=f(x)$

(i)より，$x>0$ のとき $f(x)>0$ であるから $g'(x)>0$

よって，$g(x)$ は $x\geqq 0$ において単調に増加する。

また，$g(0)=0$

したがって，$x>0$ のとき $g(x)>0$

ゆえに，$x>0$ のとき $\sin x>x-\dfrac{x^2}{2}$

(2) $f(x)=2\sqrt{x}-\log x$ とおくと　$f'(x)=2\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{\sqrt{x}-1}{x}$

$f'(x)=0$ となるのは $x=1$

したがって，$x>0$ における $f(x)$ の増減は以下。

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	／	$-$	0	$+$
$f(x)$	／	↘	極小 2	↗

よって，$x>0$ における $f(x)$ の最小値は $f(1)=2>0$

したがって，$x>0$ のとき $f(x)>0$

ゆえに，$x>0$ のとき $\log x<2\sqrt{x}$

第13講 PART1 確認問題 解答

1 **[正解]** ア：③，イ：①，ウ：①，エ：0

[解説]

$f(x)=x-\sin x$ とおくと，[A]

$f'(x)=\mathbf{1-\cos x}$

$0<x<2\pi$ のとき，$\cos x<1$ だから，

$1-\cos x>0$

$f'(x)>0$

よって，$f(x)$ は $0<x<2\pi$ で単調に**増加**する。[B]

また，$f(0)=0-\sin 0=\mathbf{0}$

であるから，$0<x<2\pi$ のとき，

$f(x)>0$

ゆえに，$0<x<2\pi$ のとき，

$x>\sin x$

[A]　$f(x)=$(左辺)$-$(右辺)とおいて，$f(x)>0$ を示す。

[B]　$f'(x)>0$
$\Longrightarrow$ $f(x)$ は単調に増加
$f'(x)<0$
$\Longrightarrow$ $f(x)$は単調に減少

2　**[正解]** オ：③，カ：①，キ：①，ク：0

[解説]

$g(x)=\cos x-\left(1-\frac{1}{2}x^2\right)$ とおくと，[C]

$$g(x)=\cos x-1+\frac{1}{2}x^2$$

$$g'(x)=-\sin x+x$$

$$=\boldsymbol{x-\sin x}$$

(＊)より，$0<x<2\pi$ のとき，$x-\sin x>0$

であるから，$g'(x)>0$

よって，$g(x)$ は $0<x<2\pi$ で単調に**増加**する。

[D]

また，$g(0)=\cos 0-1=\boldsymbol{0}$ であるから，

$0<x<2\pi$ のとき，$g(x)>0$

ゆえに，$0<x<2\pi$ のとき，

$$\cos x>1-\frac{1}{2}x^2$$

[C]　$g(x)=$(左辺)$-$(右辺)とおいて，$g(x)>0$ を示す。

[D]　$f'(x)>0$
$\Longrightarrow$　$f(x)$ は単調に増加
$f'(x)<0$
$\Longrightarrow$　$f(x)$は単調に減少

3 **[正解]** ケ：④，コ：1，サ：1

[解説]

$h(x)=x-\log x$ とおくと，[E]

$$h'(x)=1-\frac{1}{x}$$

$$=\boldsymbol{\frac{x-1}{x}}$$

$h'(x)=0$ となる x の値は，$x=1$

$x>0$ において, $h(x)$ の増減は次のようになる。

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(x)$	／	$-$	0	$+$
$h(x)$	／	↘	1	↗

[F]

よって，$x>0$ において $h(x)$ は $x=\boldsymbol{1}$ で最小値 **1** をとる。

したがって，$x>0$ のとき，$h(x)>0$ [G]

すなわち，$x>0$ のとき，$\log x<x$

［E］ $h(x)=$(右辺)$-$(左辺)とおいて，$h(x)>0$ を示す。

［F］ $x>0$ の範囲で増減表をつくる。

［G］ $x>0$ における $h(x)$ の最小値が正であるとき，$x>0$において $h(x)>0$ がいえる。